¿QUÉ INFORMACIÓN GRÁFICA APORTA EL VALOR NUMÉRICO DE LA DERIVADA SEGUNDA?

Ana Clara Díaz – María José Díaz – Leticia Elichirigoity – Verónica Molfino

anaclaradiaz@gmail.com - mariadiaz177@gmail.com - leticiaipa89@gmail.com - veromolfino@gmail.com

Instituto de Profesores Artigas, Montevideo, Uruguay

Tema: Pensamiento variacional
Modalidad: Taller
Nivel: Formación y actualización docente
Palabras clave: análisis, derivada segunda, pensamiento y lenguaje variacional, imagen conceptual

Resumen

Las relaciones entre los aspectos gráfico y numérico de la derivada primera son ampliamente estudiadas en Educación Media y nivel terciario. No sucede lo mismo con la derivada segunda, donde estas relaciones son poco abordadas y prácticamente desconocidas por la mayoría de los estudiantes de Enseñanza Media.

En este taller proponemos elaborar una conjetura sobre esta relación entre aspectos gráficos y numéricos para la derivada segunda, a partir del trabajo desarrollado en la tesis de Testa (2004). El uso de herramientas dinámicas de graficación facilitará su comprobación o posible reformulación.

A partir de esta conjetura reflexionaremos sobre posibles abordajes de estudio dentro de los cursos de Análisis, desde una perspectiva variacional.

1) Introducción

Este taller surge a partir de un trabajo de investigación realizado en el marco de la asignatura Análisis del Discurso Matemático Escolar, correspondiente al cuarto año del Profesorado de Matemática del Instituto de Profesores Artigas; motivado por la lectura de los documentos "Procesos de resignificación del valor numérico de la función derivada segunda: un estudio en el sistema escolar uruguayo" (Testa, 2006) y "Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis" (Cantoral y Farfán, 1998). El objetivo que nos proponemos es reflexionar sobre el significado gráfico que le podemos otorgar al valor numérico de la función derivada segunda, más allá del abordaje que tradicionalmente se hace del mismo, vinculado a la concavidad.

2) Antecedentes y marco teórico

Antecedentes

Nuestro principal antecedente es el artículo "Procesos de resignificación del valor numérico de la función derivada segunda: un estudio en el sistema escolar uruguayo" (Testa, 2006), realizado a partir de su tesis de maestría. En él, se propone investigar:

> Cuál es el significado gráfico que asignan los estudiantes al valor numérico de la función derivada segunda, cuál es el papel que juegan las definiciones del concepto, y/o la imagen del concepto, al enfrentarse a actividades que ponen en juego el valor numérico de la función derivada segunda y cómo influye su Pensamiento y Lenguaje Variacional (PLV) al trabajar en dichas actividades. (Testa, 2006, p. 160)

Según la autora, el discurso matemático escolar en torno al concepto de derivada fomenta un tratamiento del mismo meramente instrumental, donde el principal objetivo es que la derivada sea una herramienta para poder representar funciones gráficamente. Como consecuencia, existe un abordaje del concepto que no fomenta otras perspectivas, salvo las mencionadas anteriormente. No se pone en juego lo que refiere al PLV del estudiante ni al valor numérico de la derivada segunda, ni se fomenta la interpretación gráfica del mismo.

Más en detalle, la autora indica que en el tratamiento de las derivadas sucesivas (de una función f) no se trabaja con derivadas de orden mayor a 2 y que las relaciones que aparecen entre las derivadas se dan en las siguientes direcciones $f \rightarrow f' \rightarrow f''$, $f' \rightarrow f$ y $f'' \rightarrow f$ y que no aparece por ejemplo relaciones del tipo $f'' \rightarrow f'$ ni $f'' \rightarrow f'$.

Al proponer a los estudiantes distintas actividades vinculadas a la función derivada segunda, una de las conclusiones a las que arriba la autora es que los estudiantes no le dan un significado gráfico a su valor numérico sino solamente al signo de este. Se pudo observar que los estudiantes en general, utilizan una imagen asociada al concepto función creciente o concavidad positiva o negativa para resolver las situaciones planteadas, sin recurrir a las definiciones. Esto se corresponde con lo que Vinner (1991) identifica como caso 4 (pensamiento intuitivo). Concluye que el desarrollo del PLV de los alumnos permite enriquecer el significado gráfico asociado al valor numérico de la función derivada segunda, no sólo en términos de concavidad positiva o negativa, como algo estático, sino que se considera su variación, la que genera nuevos conceptos que enriquecen su significado. Más aún, cabe destacar que las actividades propuestas por la autora enriquecen los significados de conceptos ya conocidos por los estudiantes y permiten a su vez significar nuevos, favoreciendo así el desarrollo de su PLV.

Marco teórico

Abordaremos nuestro análisis desde la perspectiva socioepistemológica, que se caracteriza por la problematización del conocimiento y considera las siguientes cuatro dimensiones fundamentales en su construcción como un sistema complejo: su naturaleza epistemológica (dimensión del saber); los planos de lo cognitivo (procesos de aprendizaje del estudiante); la dimensión didáctica (los modos de transmisión a través de la enseñanza) y su dimensión sociocultural (el contexto y las práctica sociales). Éste último plano es el que caracteriza esta perspectiva. "La socioepistemología, o epistemología de las prácticas sociales relativas al saber, es una aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar con los fenómenos de producción y difusión del saber desde una perspectiva múltiple…" (Cantoral, 2004, p.1)

Dentro de este marco, vamos a considerar los aportes que nos brinda la línea de investigación del Pensamiento y Lenguaje Variacional. Como línea de investigación, Cantoral (2004) establece que el PLV se ocupa de estudiar los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de los saberes matemáticos en relación a la variación y el cambio, en el sistema educativo y social en que se encuentra. En particular, indaga sobre tres aspectos: el estudio de estructuras variacionales específicas desde un punto de vista matemático, las funciones cognitivas que se desarrollan a través del uso de conceptos y propiedades del cambio y los problemas y situaciones abordados y resueltos en el campo de lo social mediante las estructuras variacionales. Según Cantoral (2013), la expresión *cambio*, es entendida como una modificación de estado, y *variación* es una cuantificación de dicho cambio; por tanto la construcción del concepto variación es considerado un proceso difícil y lento, porque requiere de la integración de distintos campos matemáticos, además de la comprensión de procesos matemáticos específicos.

El estudio de cambio sirve para concebir sus efectos en otros fenómenos. Ante la incapacidad humana de predecir para observar el resultado de los acontecimientos, se desarrollan algunas herramientas para anticipar el comportamiento de sistemas complejos. De esta forma la predicción se torna como un móvil que genera otras herramientas fundamentales en el desarrollo y construcción de algunos resultados y conceptos matemáticos, como podría ser el estudio de la variación y que al igual que este, se forma socialmente a partir de experiencias de individuos y grupos sociales.

En relación a nuestra investigación, podemos mencionar que la derivada permite cuantificar, describir y pronosticar la rapidez de la variación en fenómenos de la naturaleza o de la práctica. *Visualización* y *graficación* son dos visiones estrechamente relacionadas. Dado el planteo de Cantoral (2013), debemos concebir a la *visualización* no como el simple acto de ver o contemplar su gráfica; concebimos a la visualización como la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual en el pensamiento y el lenguaje del que aprende. De manera que al realizar la actividad de visualización se requiere de la utilización de nociones matemáticas asociadas a los ámbitos numéricos, gráficos, algebraicos o verbales, pero requiere también del uso de un lenguaje coloquial para explicar ciertos fenómenos. La *graficación* es una técnica o conjunto de las mismas que permiten bosquejar una gráfica de una función en particular, o sirve para interpretar el significado de las funciones y de sus propiedades desde una perspectiva cognitiva.

Un punto importante a tener en cuenta al momento de analizar el PLV es si los estudiantes han construido un universo de formas gráficas, es decir, si consideran a la gráfica de una función como una gráfica en particular como perteneciente a una familia de gráficas de funciones, ya sea polinómicas, racionales, etc.

Por otro lado, siguiendo la línea propuesta por Testa (2006), también tendremos en cuenta a nivel cognitivo, los aportes que realizan Tall y Vinner (1981) en cuanto a los términos imagen conceptual y definición del concepto.

Los autores denominan *imagen conceptual* a aquella que incluye no solo las “fotos mentales” sino también las “propiedades y procesos asociados” a un concepto, es decir que usamos dicha imagen conceptual para describir la estructura cognitiva ligada a dicho concepto. Es importante recalcar el hecho de que la imagen conceptual es propia de cada estudiante y que puede diferir de la imagen conceptual que posea otro estudiante sobre el mismo concepto. Por ejemplo cuando escuchamos la palabra “función” se puede recordar la expresión $y = f(x)$, se puede visualizar el gráfico de una función, o pensar específicamente en funciones como $y = x^2$, $y = \sin(x)$ o $y = \sin(x)$.

Para Tall y Vinner (1981), “la *definición de un concepto* es un conjunto de palabras que son utilizadas para explicar dicho concepto” (p. 2). Puede ser una reconstrucción personal de la definición por parte del estudiante, de esta manera dicha definición pasa a ser personal, pudiendo diferir de la definición formal. Es entonces la forma en el que el estudiante utiliza las palabras para explicar su imagen conceptual.

Con respecto a la estructura cognitiva de un sujeto, Vinner (1991), considera la existencia de dos “celdas” diferentes, una celda para la(s) definición(es) del concepto y otra parte para la imagen conceptual, así como el proceso intelectual de los estudiantes frente a situaciones problema que el docente espera que realicen. Distingue cuatro casos los cuales presentan los diferentes caminos que el sistema cognitivo podría generar a dar respuesta a un problema:

Caso 1: Se consulta sólo la celda de las definiciones (deducción puramente formal).

Caso 2: Se evoca en una primera instancia la Imagen del Concepto, luego se consulta su definición para, a partir de ahí, dar una respuesta (deducción siguiendo un pensamiento intuitivo).

Caso 3: Se recurre en una primera instancia a la definición del concepto, se realiza una interacción con la imagen de éste, pero la respuesta es dada a partir de su definición (interacción entre definición e imagen).

Caso 4: Se consulta solamente la celda de la Imagen del Concepto para dar una respuesta (respuesta intuitiva).

Además Testa (2006, p. 167) considera un nuevo tipo de respuesta posible.

"Caso 5: Se recurre en una primera instancia a la celda de la Imagen del Concepto, se realiza una interacción con la definición pero la respuesta es dada a partir de la celda de la Imagen del Concepto."

3) **Secuencia a trabajar: fundamentación y análisis a priori**

La secuencia que realizamos consta de tres actividades. Con la misma se pretende que el participante se cuestione el significado del valor numérico de la función derivada segunda y su relación con la representación gráfica de la función, evidenciando cuál es su creencia al respecto al realizar diferentes tareas. La secuencia se encuentra en anexos.

Con la actividad 1 parte a) buscamos indagar la imagen conceptual que poseen los participantes respecto al valor numérico de la derivada primera y su relación con la representación gráfica de la función. Para ello, se pide que indiquen dos valores que cumplan a partir de la gráfica de la función.

En la parte b) de la misma actividad se quiere observar la imagen conceptual que poseen al respecto del valor numérico de la derivada segunda y su relación con la representación gráfica de la función, al pedirles que comparen para los valores dados anteriormente, conociendo el gráfico de la función.

En la parte c) se pretende evidenciar si existe en los participantes un preconcepto establecido sobre la interpretación gráfica del valor numérico de la derivada segunda, por medio de la realización de una conjetura al respecto. La conjetura esperada, que coincide con la esperada por Testa (2006), es la siguiente:

> El valor numérico de la función derivada segunda en $x = a$ determina la "abertura" del gráfico, o más específicamente la "proximidad" del gráfico de la función f a su recta tangente en $(a, f(a))$ en un entorno reducido de "a",

de donde si $|f''(a)| > |g''(a)|$ entonces el gráfico de f estará más alejado de su recta tangente en $x = a$ que el de g a la suya. (Testa, 2006, p. 192)

En la actividad 2 se busca que los participantes apliquen la conjetura dada previamente en algunos de los distintos casos que se pueden dar en relación al signo de la derivada primera:

1. $f'(x_1) > 0, f'(x_2) > 0, |f''(x_1)| > |f''(x_2)|$
2. $f'(x_1) < 0, f'(x_2) > 0, |f''(x_1)| > |f''(x_2)|$
3. $f'(x_1) < 0, f'(x_2) < 0, |f''(x_1)| > |f''(x_2)|$

Con la tercera actividad se pretende que los participantes se replanteen la conjetura dada en la parte c) de la actividad 1, al pedirle que verifiquen lo respondido en la actividad 2 utilizando herramientas informáticas y conociendo la expresión analítica de la función presentada anteriormente. Llegado a este punto se quiere generar un conflicto en relación a lo que se creía previamente sobre el valor numérico de la derivada segunda y ver si es posible generar nuevas relaciones entre los valores numéricos de las derivadas primera y segunda en un punto, al enfrentar a los participantes a un caso en que la conjetura esperada no se cumple.

Más allá de los objetivos particulares que tenemos con cada una de las actividades propuestas, también queremos ver de qué manera los participantes relacionan las derivadas sucesivas: si las relaciones dadas son "de subida" o "de bajada" y si se dan en un registro analítico y/o en uno gráfico. Además, nos interesa saber su grado de desarrollo del PLV (pensamiento y lenguaje variacional) al ver si estos consideran las gráficas dadas en relación a alguna familia de funciones en particular y si utilizan esto al momento de responder a las actividades planteadas.

4) Resultados obtenidos en la investigación

Esta misma secuencia fue aplicada a doce estudiantes del Instituto de Profesores Artigas durante su clase de Didáctica, con el permiso del docente.

Observamos a partir del análisis de las respuestas de los estudiantes que en general la imagen conceptual que ha formado cada uno en relación al valor numérico de la derivada primera, es rica en aspectos gráficos, pero que esto no ocurre con la imagen conceptual del valor numérico de la derivada segunda, donde a lo único que se hace referencia es a la concavidad de la función. Consideramos que esto puede suceder debido a la manera en que estos temas se tratan en los cursos, lo cual es reflejado en los programas y libros de textos según lo observamos en el análisis de los mismos

En relación al PLV de los estudiantes, podemos concluir que sí está presente en algunos estudiantes un universo de formas gráficas, en su mayoría funciones polinómicas, a las cuales pueden recurrir para resolver situaciones. Consideramos que actividades de este tipo pueden fomentar aún más lo dicho anteriormente y a su vez permitirían tratar con el cambio y la variación al trabajar con las funciones derivadas.

En general, vimos que a los estudiantes les cuesta romper con lo que ya saben, recurren a cosas que conocen pero les cuesta generar conjeturas nuevas o poner a prueba las existentes.

5) Cómo continuar a partir de esto

Esta secuencia puede tener una segunda etapa, en la cual se pueda introducir el concepto y la fórmula del radio de curvatura, para justificar que tanto el valor numérico de la función derivada primera como de la función derivada segunda influyen en la "forma" de la gráfica. Un ejemplo de una secuencia posible se encuentra en anexos.

Bibliografía

Cantoral, R. (2004). *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica*. En Díaz Moreno, L. (Ed) Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17, 1 – 9. Chile: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. http://www.clame.org.mx/documentos/alme%2017.pdf Consultado 11/08/2015

Cantoral, R. (Ed). (2013) *Teoría Socioepistemológica de la matemática educativa: estudios sobre construcción social de conocimiento*. Barcelona, España: Gedisa.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). *Pensamiento y lenguaje Variacional en la introducción al análisis*. Épsilon, Revista de S.A.E.M "Thales". 42, 353-369.

Tall, D. Y Vinner, S. (1981). *Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity*. *Educational Studies in Mathematics, 12* (7). pp. 151-169. ISSN 0013-1954. (Traducción De C. Ochoviet y M. Olave para la asignatura Análisis del Discurso Matemática Escolar)

Testa, Y. (2006). *Procesos de resignificación del valor numérico de la derivada segunda: un estudio en el sistema escolar uruguayo*. En M. Dalcín, M. Olave, C. Ochoviet y Y. Testa (Comp). Didáctica de Matemática. Cuatro trabajos de investigación en el marco del sistema educativo uruguayo, pp 153-196. Montevideo: Ediciones Rocamadur.

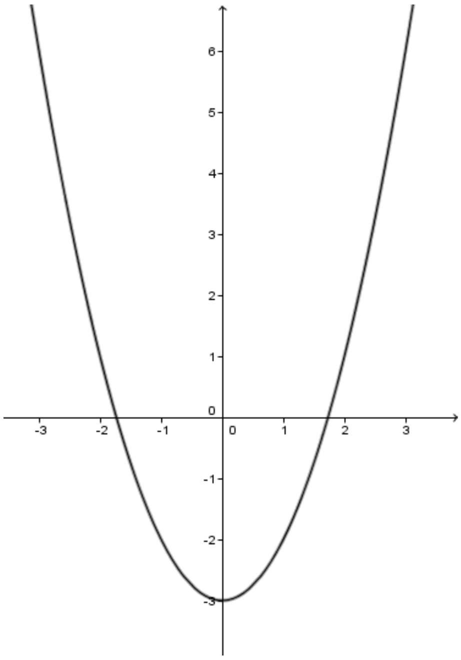
Vinner, S. (1991). *The role of definitions in teaching and learning*. En D. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking. (Traducción de M. Olave)

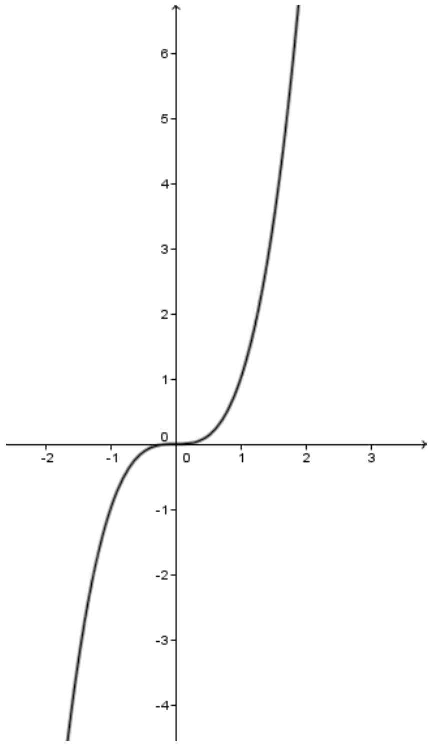
Anexos

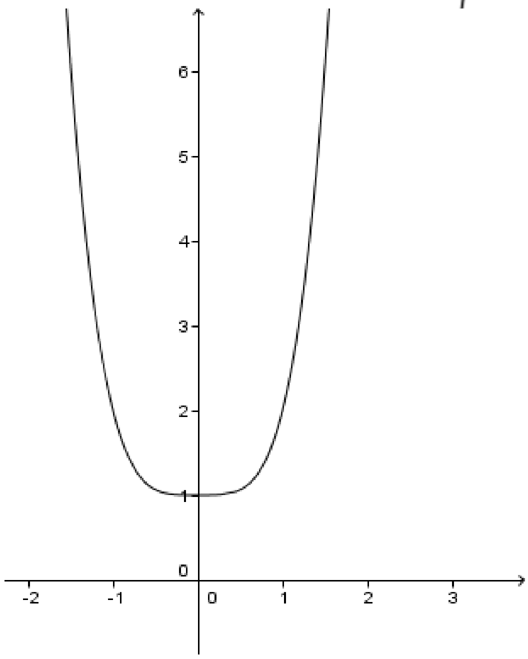
1. **Secuencia de actividades a trabajar en el taller**

Actividad 1

a) Observa las siguientes gráficas e indica para cada una de ellas dos valores x_1 y x_2 que cumplan $|f\,'(x_1)| > |f\,'(x_2)|$







b) Para los valores indicados anteriormente completa con >, < o = y justifica tu respuesta: $|f\,''(x_1)| \ldots. |f\,''(x_2)|$

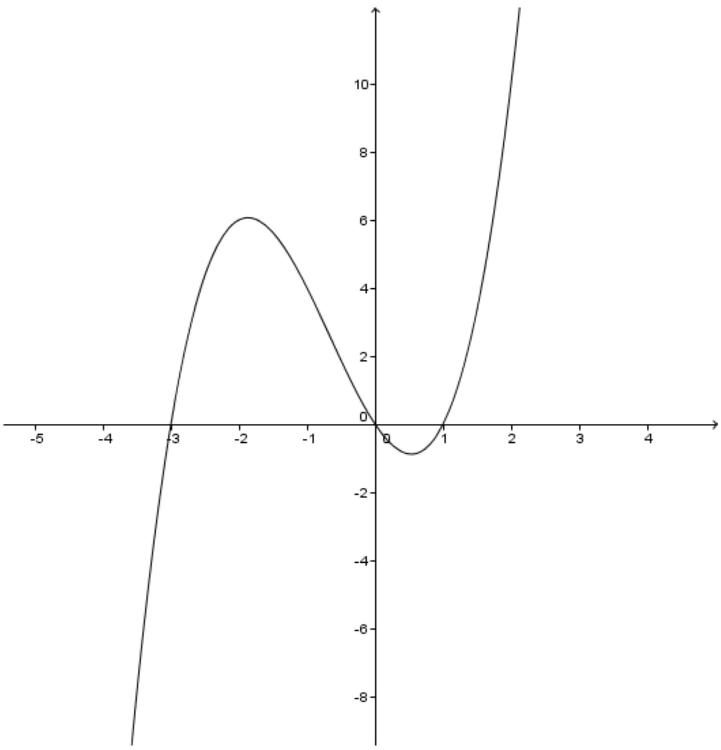
c) ¿Qué relación crees que exista entre el valor numérico de la función derivada segunda para un cierto valor de x y la “proximidad” del gráfico de la función f a su recta tangente en $(x, f(x))$?

Actividad 2

A partir del gráfico de la función f de dominio$\mathbb{R}$, indica dos valores x_1 y x_2 que creas que cumplan:

1. $f\,'(x_1) > 0, f\,'(x_2) > 0, |f\,''(x_1)| > |f\,''(x_2)|$
2. $f\,'(x_1) < 0, f\,'(x_2) < 0, |f\,''(x_1)| >$
3. $|f\,''(x_2)| f\,'(x_1) > 0, f\,'(x_2) < 0, |f\,''(x_1)| > |f\,''(x_2)|$

Justifica ampliamente tu respuesta.



Actividad 3

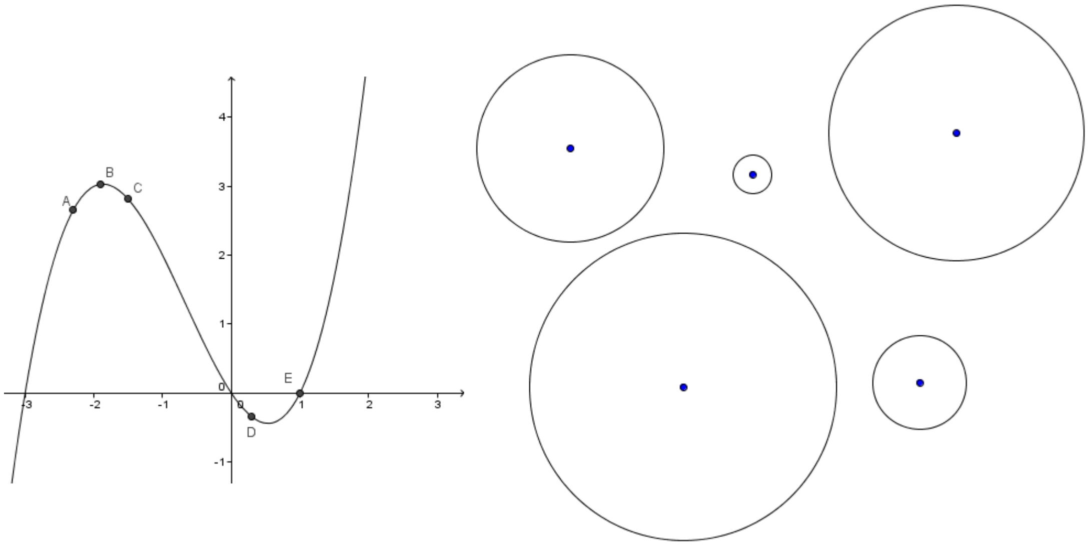
El gráfico de la pregunta anterior corresponde a la función

$$f: R \rightarrow R /\ f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$$

Graficala en Geogebra e investiga la validez de las respuestas dadas en la parte 2).
Analiza la validez de la respuesta dada en 1c, con la ayuda de un deslizador ¿sigue siendo la misma? ¿Por qué?

2. Posible actividad para continuar la secuencia

1. Considera la gráfica siguiente y elige entre las circunferencias dadas la que mejor aproxime a la misma en los puntos indicados.
2. ¿Cómo podrías caracterizar a las circunferencias dadas? ¿De qué dependerá su radio? Justifica ampliamente tu respuesta.



3. Considera la siguiente definiciones y verifica las respuestas dadas en las partes anteriores, sabiendo que la gráfica dada corresponde a la función de dominio real $f(x) = 0.5\,(x^3 + 2x^2 - 3x)$

   La curvatura es una medida del cambio que sufre la dirección de la recta tangente a una curva cuando nos movemos a lo largo de ésta. El radio de curvatura se define como el inverso de la curvatura y es el radio de una circunferencia tangente a la curva en el puno que mejor la aproxima. A esta circunferencia se le llama circunferencia osculadora o círculo osculador.
   Se puede calcular el radio de curvatura con la siguiente fórmula:

$$R_c = \frac{(1 + f'(a)^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''(a)|}$$

4. A partir de lo realizado anteriormente, contesta:
   ¿Qué relación existe entre el valor numérico de la función derivada segunda para un cierto valor de x y la "forma" de su gráfica en un entorno de $(x, f(x))$*?*